

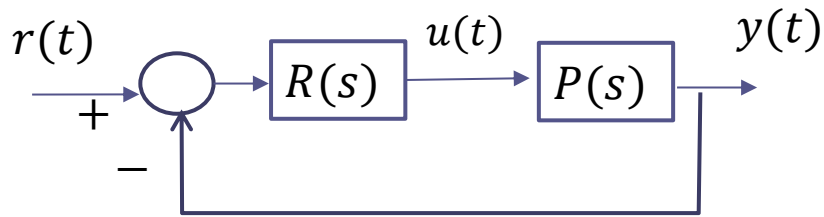
Controlli Automatici

Sintesi diretta e regione ammissibile

Prof. Alessandro Pisano

`apisano@unica.it`

Sintesi diretta per un sistema di controllo single-loop



La sintesi diretta è una metodologia di progetto che fissa, come passo preliminare, una **funzione di trasferimento desiderata** $W_d(s)$ per il sistema a ciclo chiuso.

$$W_d(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)}$$

Successivamente, e molto banalmente, si determina quale debba essere la FdT $R(s)$ del regolatore tale da garantire che la FdT a ciclo chiuso coincida con la FdT desiderata $W_d(s)$

La risposta è:

$$W_d(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \quad \longleftrightarrow \quad R(s) = \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)}$$

Si verifica facilmente che tale scelta per il regolatore conduce alla FdT desiderata a ciclo chiuso

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = \frac{\frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} P(s)}{1 + \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} P(s)} = \frac{\frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)}}{1 + \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)}} \\ &= \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s) + W_d(s)} = W_d(s) \end{aligned}$$

Espressione semplificata del controllore in funzione dei polinomi a numeratore e denominatore delle FdT del processo e della FdT desiderata

Sia:

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \qquad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

$$R(s) = \frac{W_d(s)}{1 - W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} = \frac{\frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}}{1 - \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)}$$

Scelta della $W_d(s)$

La scelta della FdT desiderata deve tenere conto di diversi fattori

A. Il regolatore ottenuto a fronte della applicazione della «formula»

$$R(s) = \frac{W_d(s)}{1-W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} \text{ deve essere fisicamente realizzabile}$$

B. Il comportamento del sistema a ciclo chiuso, cioè il legame che si instaura fra il set-point e l'uscita (tipicamente la risposta ad un set point costante) deve essere soddisfacente, deve in altri termini soddisfare determinate **specifiche sul comportamento di regime e sul comportamento transitorio.**

C. Il sistema di controllo che si ottiene deve essere esternamente ed internamente stabile

Vincoli sulla scelta della $W_d(s)$

A. Il regolatore ottenuto a fronte della applicazione della «formula»

$$R(s) = \frac{W_d(s)}{1-W_d(s)} \cdot \frac{1}{P(s)} \text{ deve essere fisicamente realizzabile}$$

Il primo e fondamentale vincolo sulla scelta per la FdT desiderata $W_d(s)$ è che **il suo grado relativo** (cioè la differenza fra il grado del polinomio a denominatore ed il grado del polinomio a numeratore) **deve essere maggiore o al più uguale al grado relativo del processo $P(s)$**

Se la FdT desiderata $W_d(s)$ viola tale requisito si ottiene un regolatore $R(s)$ non fisicamente realizzabile (cioè con un numeratore avente grado superiore a quello del denominatore).

Nella pratica **sceghieremo sempre $W_d(s)$ avente grado relativo uguale a quello del processo $P(s)$.**

- B. Il comportamento del sistema a ciclo chiuso, cioè il legame che si instaura fra il set-point e l'uscita (tipicamente la risposta ad un set point costante) deve essere soddisfacente, deve in altri termini soddisfare determinate **specifiche sul comportamento di regime e sul comportamento transitorio**.

Specifiche sul comportamento a regime

Vediamo come garantire la più comune specifica inerente il comportamento a regime della variabile di uscita a fronte della applicazione di un set-point costante.

La proprietà di un sistema di controllo di garantire che il valore di regime dell'uscita replichi esattamente l'ampiezza di un set-point costante viene detta **Precisione Statica**

Sulla base del T.F.R.G., al fine di garantire la precisione statica la FdT desiderata $W_d(s)$ dovrà essere scelta **asintoticamente stabile** ed avere **guadagno statico unitario**.

Specifiche sul comportamento transitorio

Studiamo **due tipologie di specifiche sul comportamento transitorio**, entrambe formulate con riferimento alla risposta a ciclo chiuso ad un set-point costante:

- Una specifica sulla **massima sovraelongazione** percentuale tollerata
- Una specifica sul **massimo tempo di assestamento** consentito

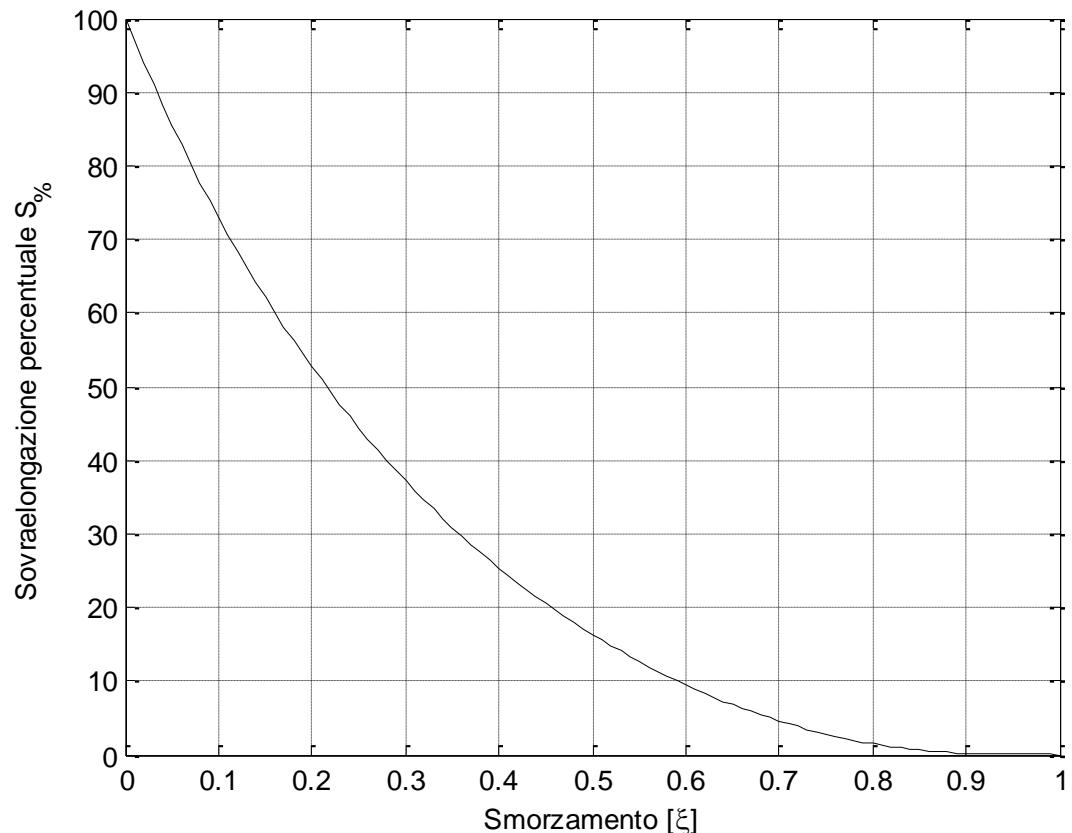
Entrambe le specifiche sono soddisfatte se i poli della FdT a ciclo chiuso ricadono all'interno di una determinata regione del piano, denominata **regione ammissibile** (e se nel contempo non vi sono nella FdT a ciclo chiuso degli zeri che alterino le caratteristiche della risposta al gradino)

Descriviamo in termini generali la procedura per l'individuazione della regione ammissibile in funzione delle due tipologie di specifiche sul comportamento transitorio

Specifica sulla sovraelongazione

La regione ammissibile per i poli si determina sulla base del diagramma che mette in relazione la sovraelongazione con lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



$$S_{\%} \leq S^*$$

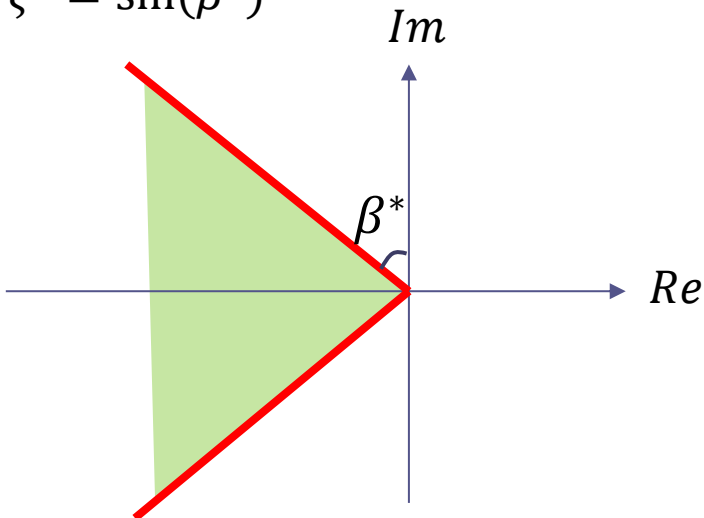


$$\xi \geq \xi^*$$

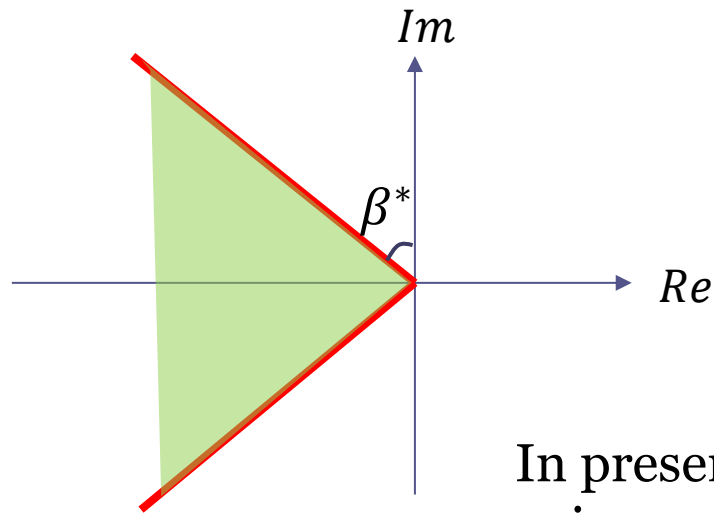
Per fare in modo che in un sistema di controllo la sovraelongazione percentuale sia minore o uguale di una certa soglia S^* è sufficiente garantire che **i poli abbiano uno smorzamento maggiore o uguale di ξ^*** , dove ξ^* può essere letto sul grafico o determinato analiticamente:

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 100e^{-\tan(\beta)\pi} \leq S^* \quad \Rightarrow \quad \beta \geq \beta^* = \tan^{-1} \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln \frac{S^*}{100} \right\}$$

$$\xi^* = \sin(\beta^*)$$



In termini grafici, ciò corrisponde a garantire che i poli ricadano all'interno di una **regione ammissibile** come quella riportata nella figura a lato



Tale approccio assume che se il sistema a ciclo chiuso possieda una coppia di poli complessi coniugati **dominante**

In presenza di più coppie di poli complessi coniugati in cui non si possa individuarne una come dominante, si procede **per tentativi** restringendo progressivamente la regione ammissibile (cioè aumentando l'angolo β^*) fino ad ottenere una risposta a ciclo chiuso la cui sovraelongazione, rilevata mediante simulazioni o prove sperimentale, soddisfi la specifica.

Se si garantisce che nel sistema a ciclo chiuso vi siano unicamente **poli reali negativi** (e nessuno zero più in bassa frequenza rispetto ai poli) **la sovraelongazione sarà in ogni caso nulla** indipendentemente dal numero dei poli e indipendentemente dal fatto che uno di questi sia dominante o meno.

Specifiche sul tempo di assestamento

La regione ammissibile per i poli a ciclo chiuso si determina sulla base delle relazioni che intercorrono fra i tempi di assestamento e la costante di tempo (eventualmente equivalente) dei poli della FdT a ciclo chiuso

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} \quad \text{«costante di tempo equivalente»}$$

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$W(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$	$3 \tau_{eq}$	$3.9 \tau_{eq}$	$4.6 \tau_{eq}$
$W(s) = \frac{\mu}{\tau s + 1}$	3τ	3.9τ	4.6τ
$W(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	4.7τ	5.8τ	6.6τ

Tabelle approssimate

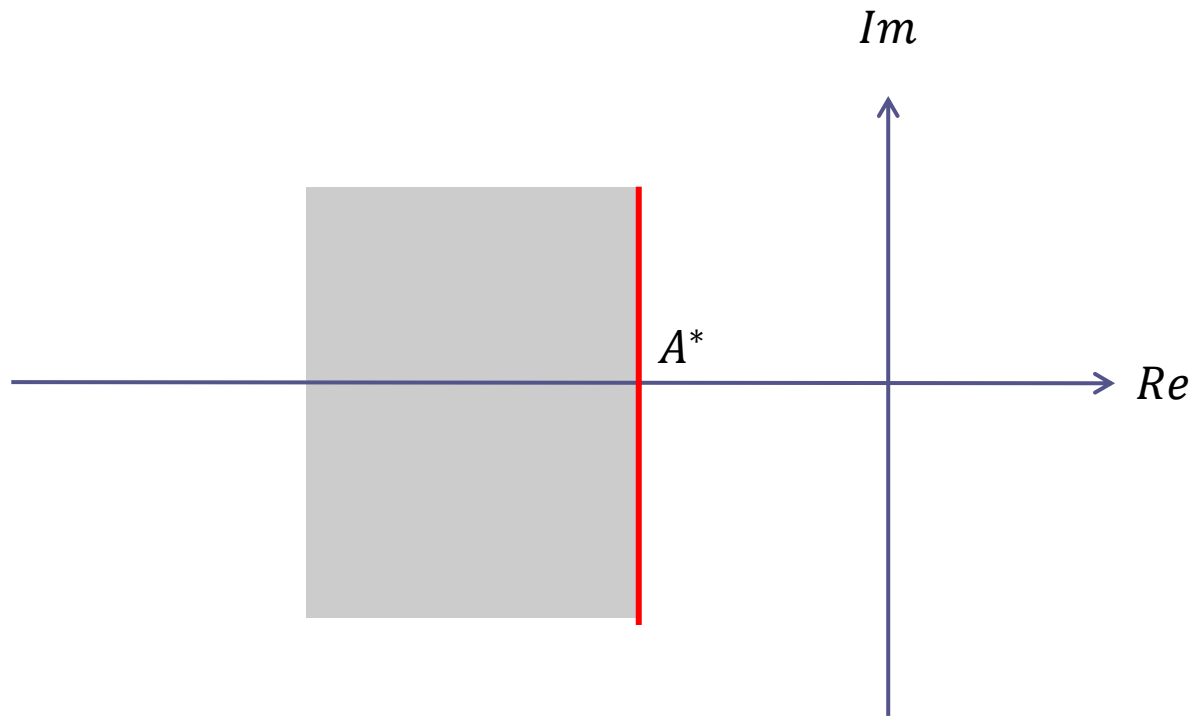
Le relazioni inserite nelle seguenti tabelle approssimate sono conservative rispetto a quelle delle tabelle più accurate presenti nella slide precedente, e quindi possono essere convenientemente impiegate in alternativa per semplicità.

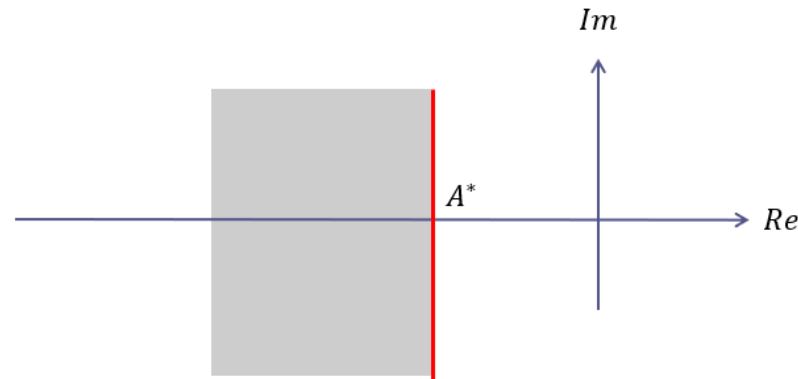
$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n} \quad \text{«costante di tempo equivalente»}$$

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$W(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$	$3 \tau_{eq}$	$4 \tau_{eq}$	$5 \tau_{eq}$
$W(s) = \frac{\mu}{\tau s + 1}$	3τ	4τ	5τ
$W(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	5τ	6τ	7τ

La scelta di **quale formula impiegare** va fatta in funzione del numero di poli presenti nella FdT a ciclo chiuso, una volta che siano stati rimossi quelli trascurabili, e della loro tipologia (reali o complessi coniugati)

In tutti i casi, si ottiene una regione ammissibile come quella mostrata in figura, ed i poli a ciclo chiuso dovranno essere collocati alla sinistra di una retta verticale



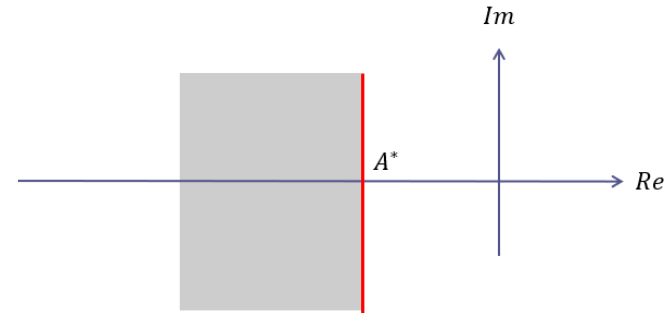


$$T_{a5\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\frac{3}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con un polo dominante reale o con una coppia di poli dominanti CC} \\ -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con due poli dominanti reali} \end{cases}$$

$$T_{a2\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\frac{4}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con un polo dominante reale o con una coppia di poli dominanti CC} \\ -\frac{6}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con due poli dominanti reali} \end{cases}$$

$$T_{a1\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con un polo dominante reale o con una coppia di poli dominanti CC} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con due poli dominanti reali} \end{cases}$$

Versione **semplificata** della procedura di calcolo di A^*

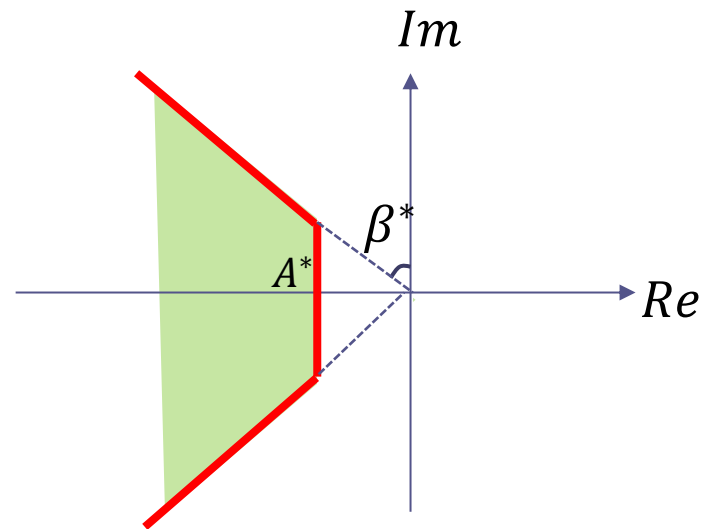


$$T_{a5\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\frac{3}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

$$T_{a2\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\frac{4}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{6}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

$$T_{a1\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

In un problema di controllo in cui sia presente una specifica sulla sovraelongazione ed una specifica sul tempo di assestamento, la regione ammissibile sarà pertanto complessivamente del tipo



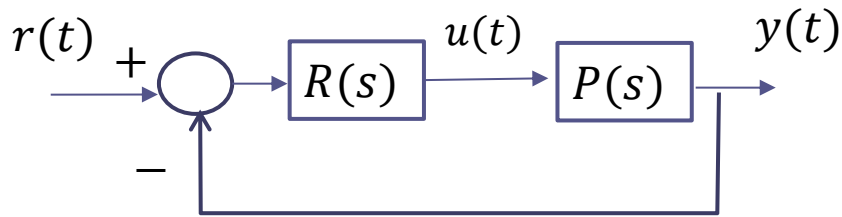
C. Il sistema di controllo che si ottiene deve essere esternamente ed internamente stabile

Se il processo $P(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri e parte reale negativa (processo «a fase minima») la scelta di una FdT desiderata asintoticamente stabile garantisce nel contempo sia la stabilità esterna che la stabilità interna del sistema di controllo



Se il processo $P(s)$ ha poli e/o zeri a parte reale positiva o nulla sussistono ulteriori vincoli e accorgimenti operativi, che descriviamo un po' più avanti.

Esempio preliminare di progetto mediante sintesi diretta



$$P(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

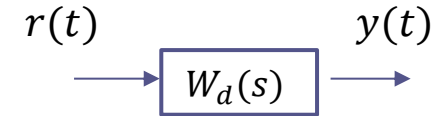
Specifiche

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino monotona crescente

S3 $T_{a1\%} \leq 0.5s$

- S1 Precisione statica
- S2 Risposta al gradino monotona crescente
- S3 $T_{a1\%} \leq 0.5s$



Il processo $P(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)}$ ha grado relativo unitario. Affinché sia garantita la fisica realizzabilità del controllore dobbiamo scegliere una FdT desiderata a ciclo chiuso avente anch'essa grado relativo unitario (o eventualmente grado relativo superiore, scelta peraltro mai adottata in quanto non apporta alcun beneficio). Ipotizziamo la scelta di una FdT desiderata nella forma di un processo STC asintoticamente stabile:

$$W_d(s) = \frac{\mu}{\tau s + 1}$$

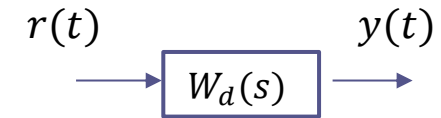
Per garantire la specifica S1 il guadagno statico $\mu = W_d(0)$ deve essere unitario

$$W_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino monotona crescente

S3 $T_{a1\%} \leq 0.5s$



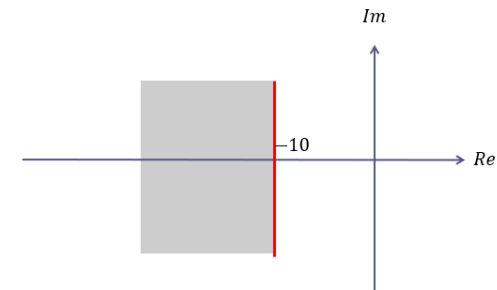
$$W_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

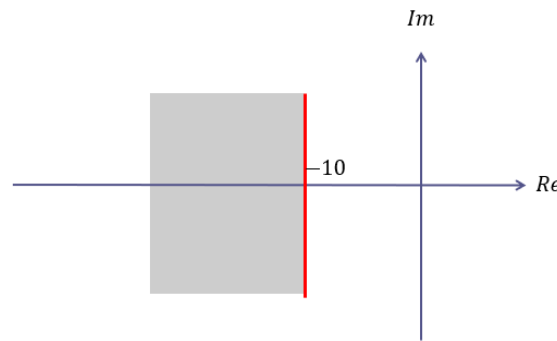
S2 è soddisfatta perché un processo STC esibisce una risposta al gradino monotona crescente

Per garantire il soddisfacimento della specifica S3 dobbiamo determinare la **regione ammissibile** entro la quale posizionare il polo della $W_d(s)$

$$T_{a1\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

$$T^* = 0.5s \quad A^* = -\frac{5}{T^*} = -\frac{5}{0.5} = -10$$





$$W_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Il polo $p = -1/\tau$ di $W_d(s)$ deve essere posizionato nel punto -10 o più a sinistra

$$-\frac{1}{\tau} \leq -10 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\tau} \geq 10 \quad \Rightarrow \quad \tau \leq \frac{1}{10} = 0.1$$

Scegliamo: $\tau = 0.1$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.1s + 1}$$

Si poteva giungere più rapidamente al medesimo risultato impiegando l'espressione esplicita del tempo di assestamento all'1% di un processo STC (che vale 5τ) e imponendo che il suo valore non eccedesse la soglia massima consentita:

$$5\tau \leq 0.5 \quad \Rightarrow \quad \tau \leq 0.1$$

Determiniamo la FdT del regolatore $R(s)$ tale da garantire che la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita sia effettivamente pari alla $W_d(s)$ scelta. Usiamo l'espressione semplificata della formula in funzione dei polinomi a numeratore e denominatore della FdT $P(s)$ del processo e della FdT desiderata $W_d(s)$:

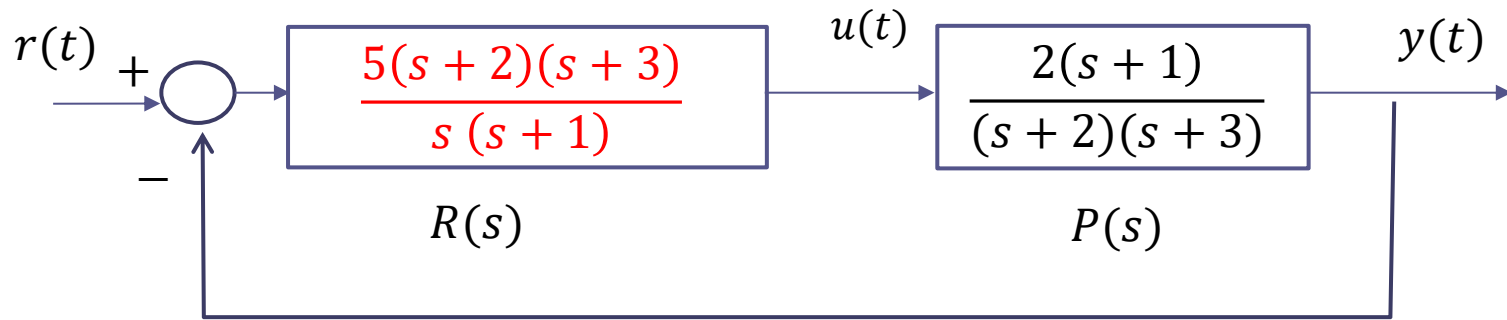
$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

$$P(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)} \Rightarrow \begin{aligned} N_P(s) &= 2(s+1) \\ D_P(s) &= (s+2)(s+3) \end{aligned}$$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.1s+1} \Rightarrow \begin{aligned} N_{W_d}(s) &= 1 \\ D_{W_d}(s) &= 0.1s+1 \end{aligned} \Rightarrow D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.1s$$

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{1}{0.1s} \cdot \frac{(s+2)(s+3)}{2(s+1)} = \\ &= \frac{(s+2)(s+3)}{0.2s(s+1)} = \frac{5(s+2)(s+3)}{s(s+1)} \end{aligned}$$

Sistema di controllo progettato



Si osservi come il controllore «cancelli» attraverso i suoi due zeri i due poli del processo, e attraverso uno dei suoi poli lo zero del processo.

Il fatto che il processo $P(s)$ abbia tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro garantisce che le cancellazioni siano tutte stabili. Avendo scelto una FdT desiderata asintoticamente stabile il sistema di controllo risulta essere pertanto non solo esternamente stabile a ciclo chiuso ma anche internamente stabile.

Torniamo ad una delle slides precedenti:

C. Il sistema di controllo che si ottiene deve essere esternamente ed internamente stabile

Se il processo $P(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri e parte reale negativa (processo «a fase minima») la scelta di una FdT desiderata che sia asintoticamente stabile garantisce nel contempo anche la stabilità interna del sistema di controllo

Se il processo $P(s)$ ha poli e/o zeri a parte reale positiva o nulla sussistono ulteriori vincoli e accorgimenti operativi, che descriviamo un po' più avanti.

E' tempo di precisare quali siano gli «ulteriori vincoli» sulla scelta della FdT desiderata da imporre quando il processo possiede poli e/o zeri a parte reale positiva o nulla.

Per comprendere la ragione di tali vincoli addizionali sulla scelta della FdT desiderata $W_d(s)$, da imporre quando il processo possiede poli e/o zeri a parte positiva o nulla, è conveniente riferirsi alla formula «semplificata» per il calcolo della FdT del controllore

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

Si nota come a numeratore del controllore sia presente il termine $D_P(s)$. Ciò significa che in genere gli zeri del controllore operano una cancellazione completa di tutti i poli del processo, e se il **processo ha dei poli a parte reale positiva o nulla** si vanno a effettuare quelle cancellazioni non consentite che compromettono la stabilità interna del sistema di controllo.

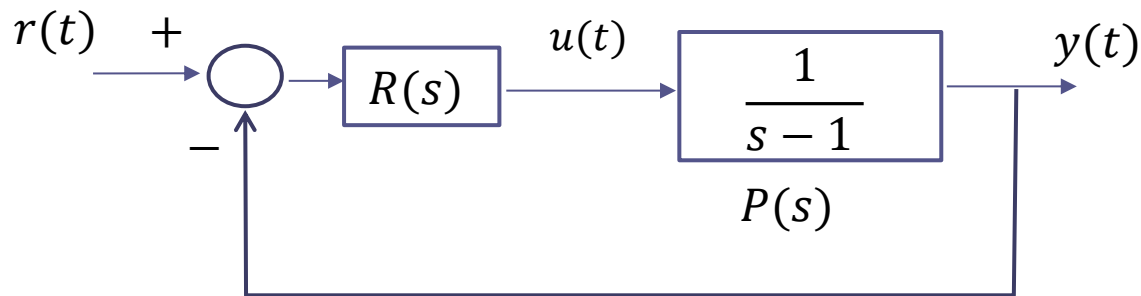
Il modo per evitare questo fenomeno è **scegliere la FdT desiderata $W_d(s)$ in modo che il polinomio $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$ ammetta fra le proprie radici tutti i poli del processo aventi parte reale positiva o nulla**. In tal modo, la cancellazione «non consentita» fra zeri del controllore e poli del processo non avrà più luogo e sarà preservata la stabilità interna del sistema di controllo.



Quando il **processo ha un polo nell'origine**, per garantire che il polinomio $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$ ammetta fra le proprie radici un polo nell'origine è sufficiente **scegliere la FdT desiderata $W_d(s)$ con guadagno statico unitario.**

Come verifica di questa affermazione si analizzi l' esempio preliminare di progetto mediante sintesi diretta sviluppato alcune slides fa, in cui si scelse una FdT desiderata avente guadagno statico unitario e come risultato di questa scelta il polinomio $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$ aveva fra le proprie radici proprio un polo nell'origine

Si noti come la scelta di una FdT desiderata avente guadagno statico unitario è molto comune, in quanto serve a garantire che il sistema di controllo goda della proprietà di precisione statica.



Specifiche

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino esente da oscillazioni

S3 $T_{a1\%} \leq 1s$

Il processo $P(s) = \frac{1}{s-1}$ ha grado relativo unitario. Affinché sia garantita la fisica realizzabilità del controllore dobbiamo scegliere una FdT desiderata a ciclo chiuso avente anch'essa grado relativo unitario.

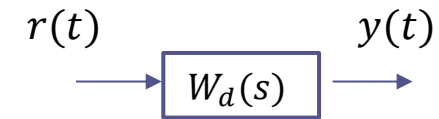
Ignorando, temporaneamente, i vincoli sulla scelta della FdT desiderata derivanti dal fatto che **il processo possiede un polo a parte reale positiva**, ipotizziamo la scelta di una FdT desiderata nella forma di un processo STC asintoticamente stabile con **guadagno statico unitario** per soddisfare la specifica S1:

$$W_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino esente da oscillazioni

S3 $T_{a1\%} \leq 1s$



$$W_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Anche la specifica S2 è soddisfatta perché un processo STC esibisce una risposta al gradino esente da oscillazioni

Per garantire il soddisfacimento della specifica S3 impieghiamo l'espressione esplicita del tempo di assestamento all'1% di un processo STC (che vale 5τ) e imponiamo che il suo valore non ecceda la soglia massima consentita:

$$5\tau \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \tau \leq 0.2$$

Scegliamo: $\tau = 0.2$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s + 1}$$

Determiniamo la FdT del controllore applicando la formula:

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

Ricaviamo in forma esplicita i polinomi a numeratore e denominatore nella FdT desiderata ed in quella del processo

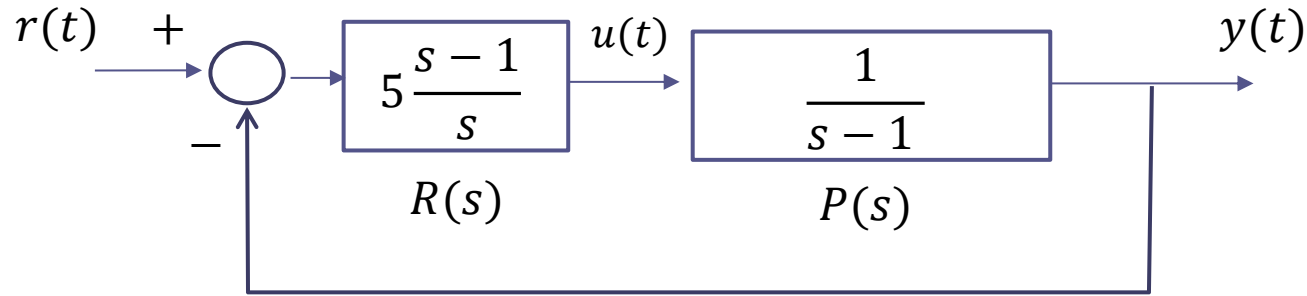
$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_P(s) &= 1 \\ D_P(s) &= s-1 \end{aligned}$$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_{W_d}(s) &= 1 \\ D_{W_d}(s) &= 0.2s+1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.2s$$

Si ha quindi:

$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{1}{0.2s} \cdot \frac{s-1}{1} = 5 \frac{s-1}{s}$$

Sistema di controllo progettato



Cancellazione instabile fra uno zero del regolatore ed un polo del processo. Il sistema di controllo è esternamente stabile ma **internamente instabile**

La risposta libera con condizione iniziale $y(0)$ non nulla **diverge** (v. TEST 2 nelle slides «Stabilità» per un esempio del tutto analogo)

La FdT desiderata non soddisfa il vincolo enunciato in precedenza in quanto il polinomio $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.2s$ **non ammette** fra le proprie radici il polo del processo avente parte reale positiva (polo in $s = 1$).

Cerchiamo una FdT desiderata più generale che soddisfi il vincolo

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s + 1} \cdot \frac{\tau_z s + 1}{T_p s + 1}$$

τ_z e T_p sono parametri da determinare
 $T_p > 0$

$W_d(s)$ ha grado relativo unitario, e anche guadagno statico unitario.

$$N_{W_d}(s) = \tau_z s + 1$$

$$D_{W_d}(s) = (0.2s + 1)(T_p s + 1)$$

$$\Rightarrow D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = (0.2s + 1)(T_p s + 1) - (\tau_z s + 1)$$

$$= s \cdot [0.2T_p s + (0.2 + T_p - \tau_z)]$$

$D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$ ammette fra le proprie radici $s = 1$ se vale la seguente relazione:

$$0.2T_p + (0.2 + T_p - \tau_z) = 0 \Rightarrow \tau_z = 1.2T_p + 0.2$$

I parametri τ_z e T_p devono pertanto soddisfare questo vincolo

$$\tau_z = 1.2T_p + 0.2$$

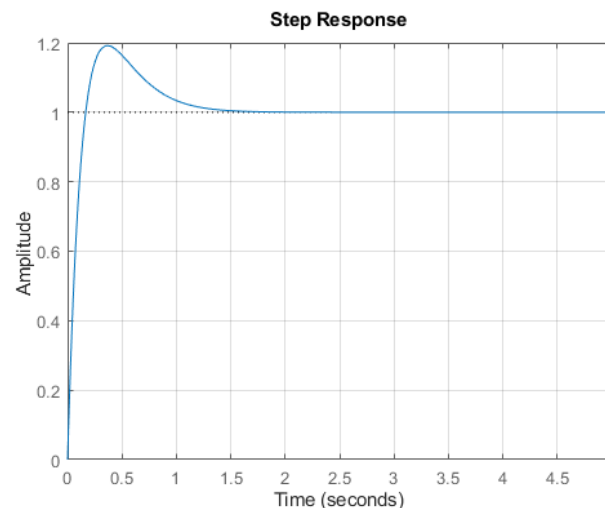
Fissiamo un valore per T_p e ricaviamo τ_z di conseguenza.

Come scelta di primo tentativo, fissiamo $T_p = 0.2$ in modo da aggiungere alla $W_d(s)$ un ulteriore polo sovrapposto a quello già presente

Sostituendo $T_p = 0.2$ nella relazione in alto si ottiene $\tau_z = 0.44$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s + 1} \cdot \frac{\tau_z s + 1}{T_p s + 1} = \frac{0.44s + 1}{(0.2s + 1)^2}$$

Verifichiamo mediante simulazione se il tempo di assestamento della $W_d(s)$ soddisfa la specifica S3



Tal =
1.3054

NON VA BENE

```
s=tf('s')
```

```
Wd=(0.44*s+1)/((0.2*s+1)^2)
step(Wd,[0:0.01:5]),grid
```

```
Info=stepinfo(Wd,SettlingTimeThreshold=0.01);
Tal=Info.SettlingTime
```

$$\tau_z = 1.2T_p + 0.2$$

Per ridurre il tempo di assestamento della risposta al gradino di $W_d(s)$ scegliamo un valore più piccolo per la costante di tempo T_p del polo: $T_p = 0.1s$

Sostituendo $T_p = 0.1s$ nella relazione in alto si ottiene $\tau_z = 0.32s$

$$W_d(s) = \frac{1}{0.2s + 1} \cdot \frac{\tau_z s + 1}{T_p s + 1} = \frac{0.32s + 1}{(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$$

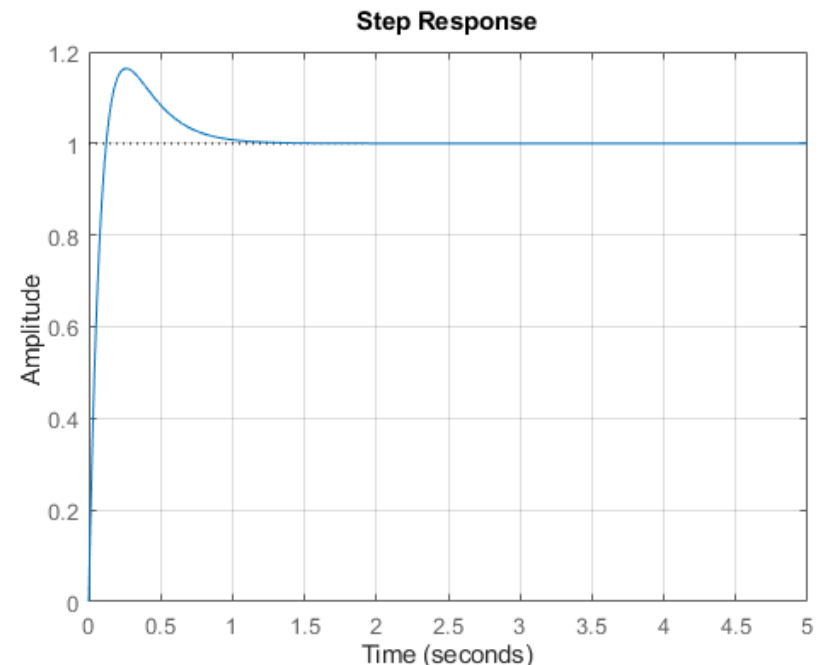
Verifichiamo mediante simulazione se il tempo di assestamento della $W_d(s)$ mcosì modificata soddisfa la specifica S3

```
s=tf('s')
Wd=(0.32*s+1)/((0.2*s+1)*(0.1*s+1))
step(Wd,[0:0.01:5]),grid

Info=stepinfo(Wd,SettlingTimeThreshold=0.01);
Tal=Info.SettlingTime
```

Tal =

0.9544

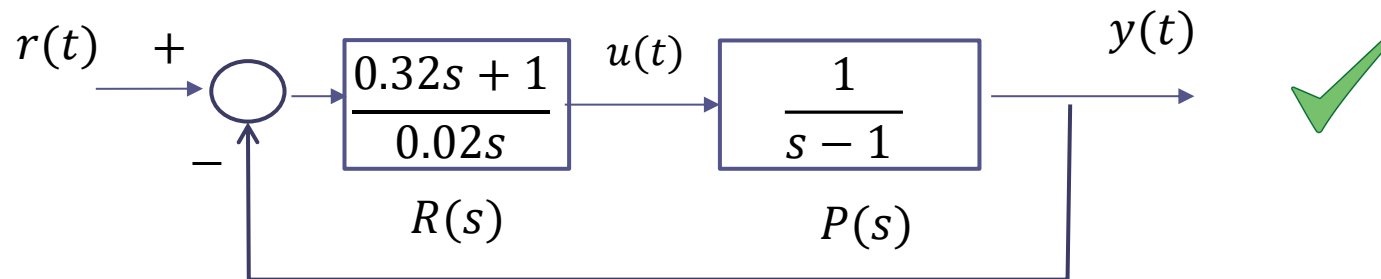


Avendo individuato $W_d(s)$, determiniamo la FdT del controllore:

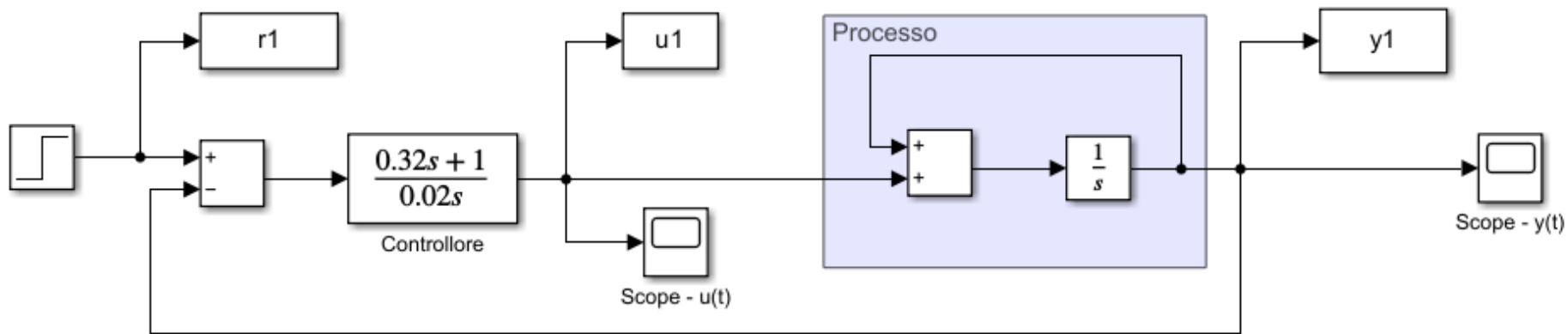
$$W_d(s) = \frac{0.32s + 1}{(0.2s + 1)(0.1s + 1)} = \frac{0.32s + 1}{0.02s^2 + 0.3s + 1} \quad P(s) = \frac{1}{s - 1}$$

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{0.32s + 1}{0.02s^2 - 0.02s} \cdot \frac{s - 1}{1} = \frac{0.32s + 1}{0.02s} \\ &= \frac{0.32s + 1}{0.02s(s - 1)} \cdot \frac{\cancel{(s - 1)}}{1} \end{aligned}$$

Sistema di controllo progettato:



$$W_r^y(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = \frac{0.32s + 1}{(0.2s + 1)(0.1s + 1)}$$



```
Tsim=3; % durata simulazione
y0=2; % condizione iniziale uscita
```

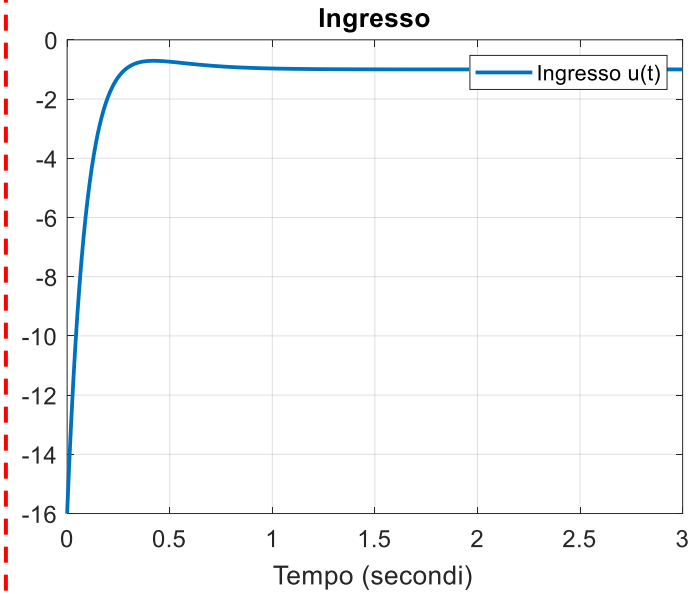
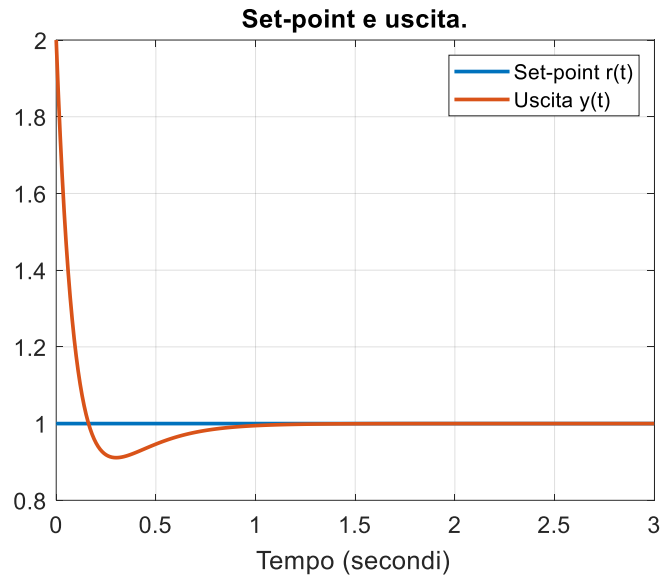
```
sim('SintesDirettaProcessoInstabile.slx')
```

```
figure(1)
plot(r1,'LineWidth',2), hold on
plot(y1,'LineWidth',2), hold off
set(gca,'FontSize',13)
grid
legend('Set-point r(t)', 'Uscita y(t)')
xlabel('Tempo (secondi)')
ylabel('')
title('Set-point e uscita.')
```

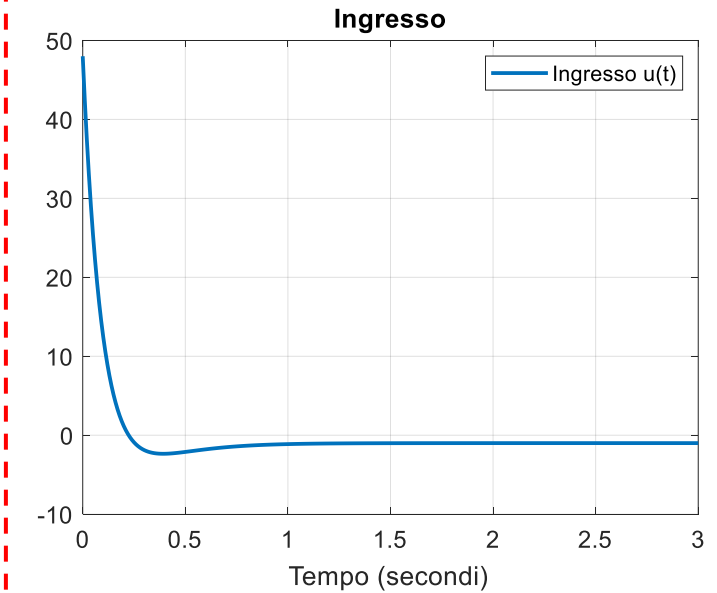
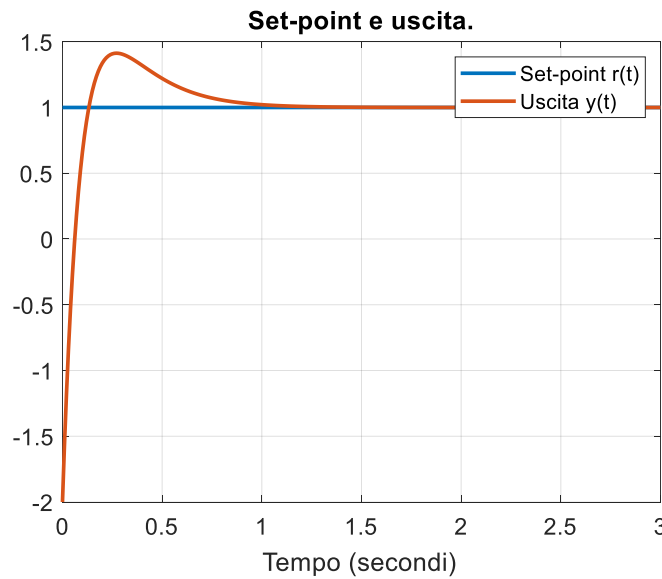
```
figure(2)
plot(u1,'LineWidth',2), grid
set(gca,'FontSize',13)
xlabel('Tempo (secondi)')
ylabel('')
title('Ingresso')
legend('Ingresso u(t)')
```

SintesDirettaProcessoInstabile.slx
SintesDirettaProcessoInstabile_file.m

$$y(0) = 2$$



$$y(0) = -2$$



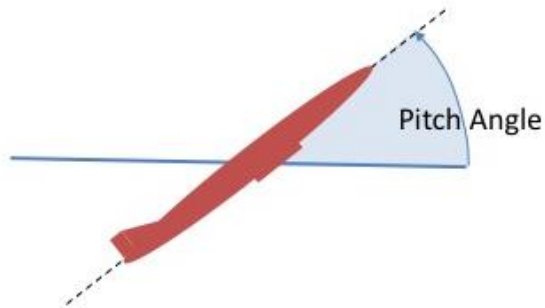
Abbiamo visto che quando il **processo ha dei poli a parte reale positiva o nulla** non è sufficiente che la FdT desiderata $W_d(s)$ abbia un grado relativo maggiore o uguale di quello del processo, ma si deve anche scegliere $W_d(s)$ in modo che il polinomio $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$ ammetta fra le proprie radici («fattorizzi») tutti i poli del processo aventi parte reale positiva o nulla. Se non si ottempera a questo vincolo si realizza un **sistema di controllo internamente instabile** in cui la risposta in presenza di condizioni iniziali diverse da zero diverge.

Ulteriori accorgimenti vanno adottati quando il processo possiede degli **zeri a parte reale positiva**.

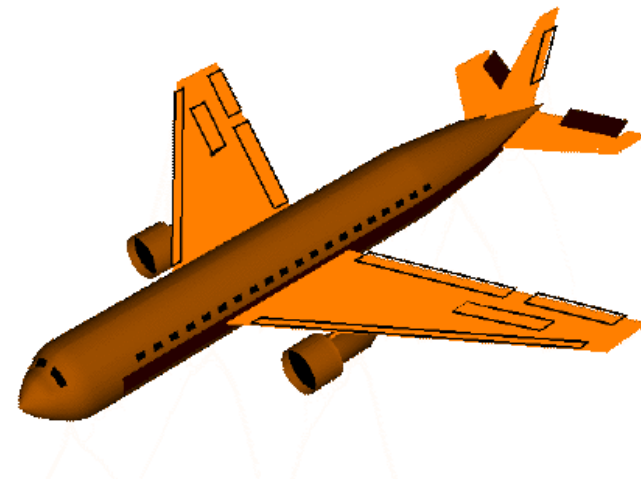
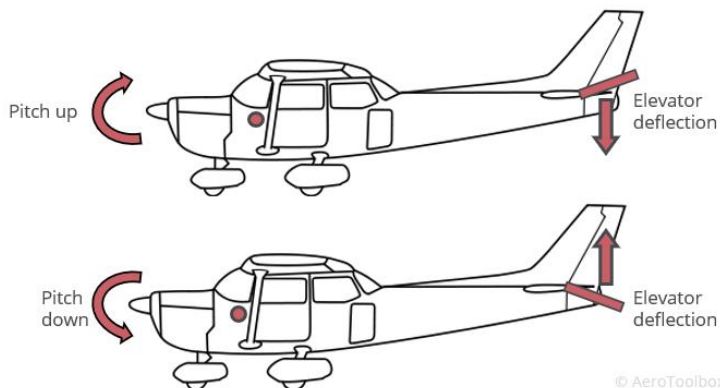
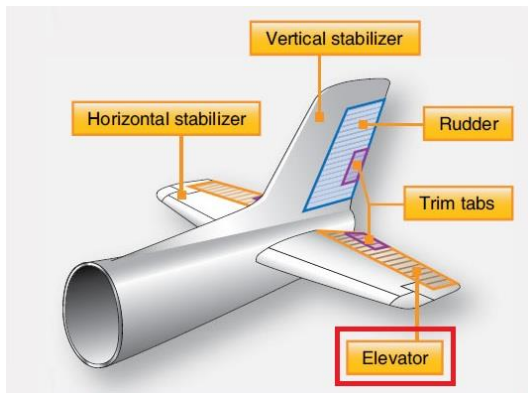
$$R(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} \quad P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)}$$

Si nota come a denominatore del controllore sia presente il termine $N_P(s)$, cioè il numeratore della FdT del processo. Ciò implica che **se il processo ha degli zeri a parte reale positiva questi diventano dei poli del controllore**, e anche stavolta si vanno a effettuare quelle cancellazioni non consentite che compromettono la stabilità interna del sistema di controllo (il segnale di ingresso al processo diverge).

Il modo per evitare questo fenomeno è **scegliere la FdT desiderata $W_d(s)$ in modo che il polinomio $N_{W_d}(s)$ ammetta fra le proprie radici tutti i poli del processo aventi parte reale positiva (in altri termini, la FdT desiderata deve avere fra i propri zeri tutti gli zeri a parte reale positiva dal processo)**. In tal modo, la cancellazione non consentita fra zeri del controllore e poli del processo non avrà più luogo e sarà preservata la stabilità interna del sistema di controllo.



In un velivolo, il controllo dell'angolo di beccheggio («pitch angle») - e di riflesso il controllo dell'altitudine - si realizza ruotando le superfici di controllo denominate «elevators», tipicamente collocate nella coda del velivolo.

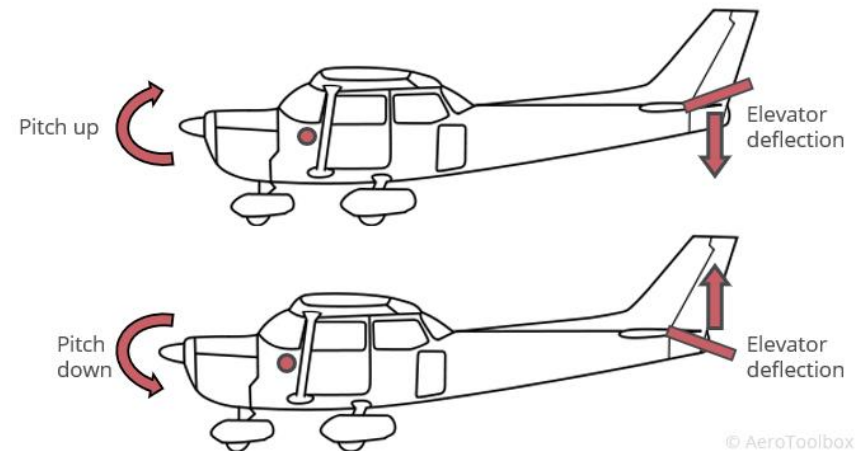


La variazione di altezza del centro di massa del velivolo conseguente ad una variazione dell'angolo degli «elevators» mostra un fenomeno di **undershooting**, che si traduce in un modello matematico (linearizzato) della dinamica del velivolo caratterizzato dalla presenza di uno zero nel semipiano destro.

Funzione di trasferimento fra l'angolo degli elevators (in gradi) e l'altezza (in metri) relativa ad un Boeing 747-200 che vola a velocità $V=900$ km/h [Mach 0.85] ad una quota di 8500 m

$$H(s) = \frac{h(s)}{\delta_e(s)} = \frac{30(s-6)}{s(s^2+4s+13)}$$

- h : altitude
- δ_e : elevator deflection
 - (downward is positive.)



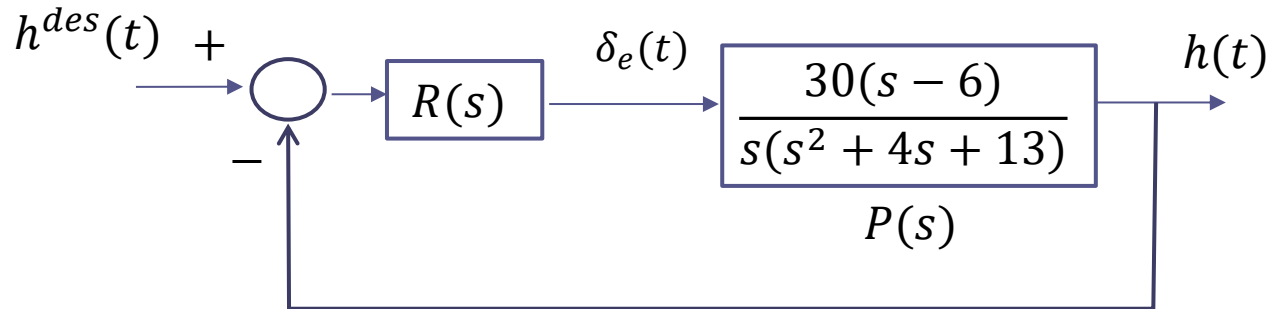
© AeroToolbox



Un altro esempio di sistema dinamico con undershooting



Durante un parcheggio parallelo in retromarcia, il centro di massa del veicolo esibisce un comportamento simile a quello di un velivolo durante una variazione di altitudine



Specifiche

S1 Precisione statica

S2 Risposta al gradino esente da oscillazioni

S3 $T_{a1\%} \leq 5s$

Progettiamo mediante sintesi diretta il sistema di controllo.

Il grado relativo della FdT del processo è pari a 2, quindi anche la FdT desiderata la sceglieremo a grado relativo 2.

In questo esempio si devono fronteggiare due diverse situazioni potenzialmente in grado di mettere in crisi la stabilità interna del sistema di controllo:

- Il processo ha uno zero a parte reale positiva
- Il processo ha un polo nell'origine, quindi a parte reale nulla.

- S1 Precisione statica
- S2 Risposta al gradino esente da oscillazioni
- S3 $T_{a1\%} \leq 5s$

$$P(s) = \frac{30(s-6)}{s(s^2+4s+13)} = \frac{-180 \cdot (1 - \frac{1}{6}s)}{s(s^2+4s+13)}$$

FdT desiderata:
$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + Ts)^3}$$

$W_d(s)$ ha grado relativo 2, quindi il regolatore è fisicamente realizzabile.

$W_d(s)$ ha guadagno statico unitario quindi è garantita la specifica S1.

Il fatto che $W_d(s)$ ha guadagno statico unitario garantisce anche (come detto in precedenza) che il controllore non cancellerà con un proprio zero il polo nell'origine del processo.

$W_d(s)$ ha lo stesso zero a parte reale positiva del processo, quindi il controllore non cancellerà con un suo polo lo zero a parte reale positiva del processo.

$W_d(s)$ ha solo poli reali (ok specifica S2)

Ricerchiamo un valore di T sufficientemente piccolo tale da garantire la specifica S3.

Ricerchiamo un valore di T sufficientemente piccolo tale da garantire la specifica S3.

$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + Ts)^3}$$

Se avessimo $W_d(s) = \frac{1}{(1+Ts)^2}$ sceglieremmo T in modo che sia soddisfatta la disuguaglianza

$$7T \leq 5 \quad T \leq \frac{5}{7} = 0.71$$

Ponendo $T = 0.7$:

$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + 0.7s)^3}$$

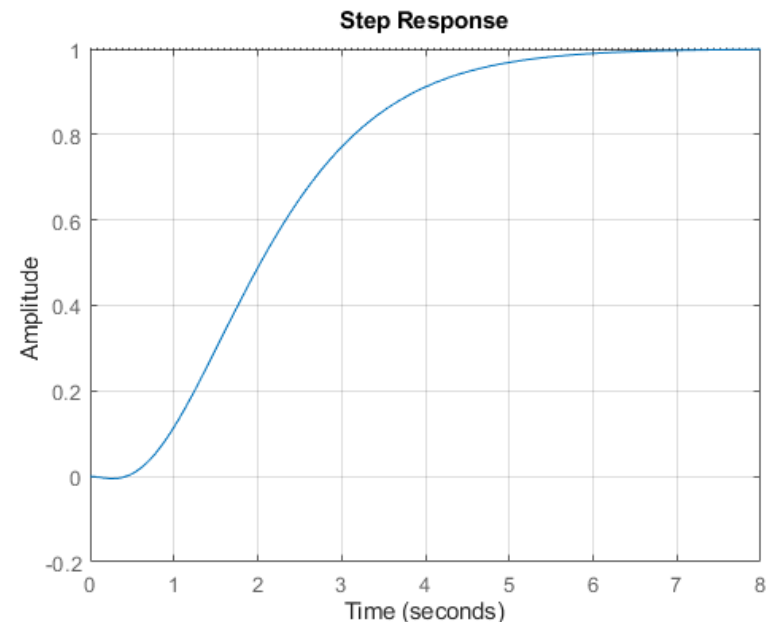
```
s=tf('s')
Wd=(1-(s/6))/((0.7*s+1)^3)
step(Wd,[0:0.01:8]),grid
```

```
Info=stepinfo(Wd,SettlingTimeThreshold=0.01);
Tal=Info.SettlingTime
```

Tal =

6.0373

NON VA BENE

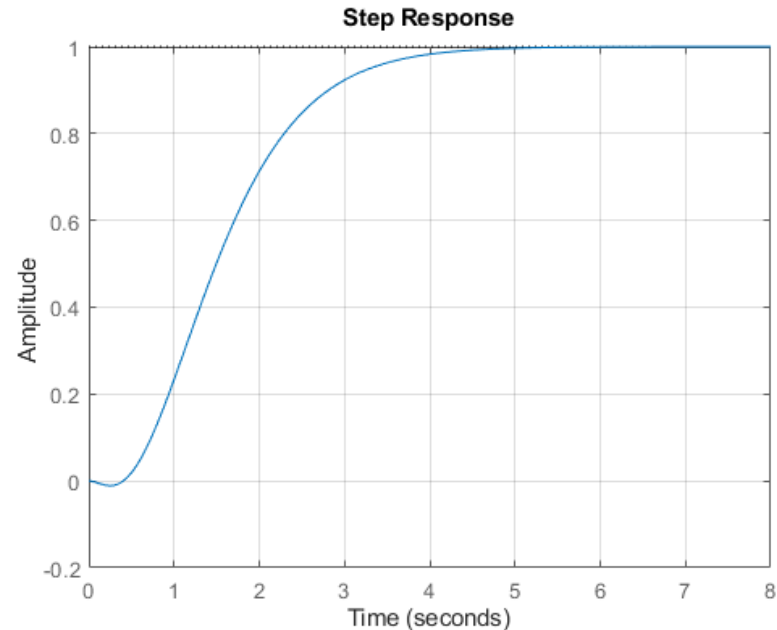


Per ridurre il tempo di assestamento della risposta al gradino di $W_d(s)$, scegliamo un valore più piccolo per la costante di tempo T : $T = 0.5s$

```
s=tf('s')
Wd=(1-(s/6))/((0.5*s+1)^3)
step(Wd,[0:0.01:8]),grid

Info=stepinfo(Wd,SettlingTimeThreshold=0.01);
Tal=Info.SettlingTime
```

```
Tal =
    4.3514
```



Scegliamo pertanto la FdT desiderata come segue:

$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + 0.5s)^3}$$

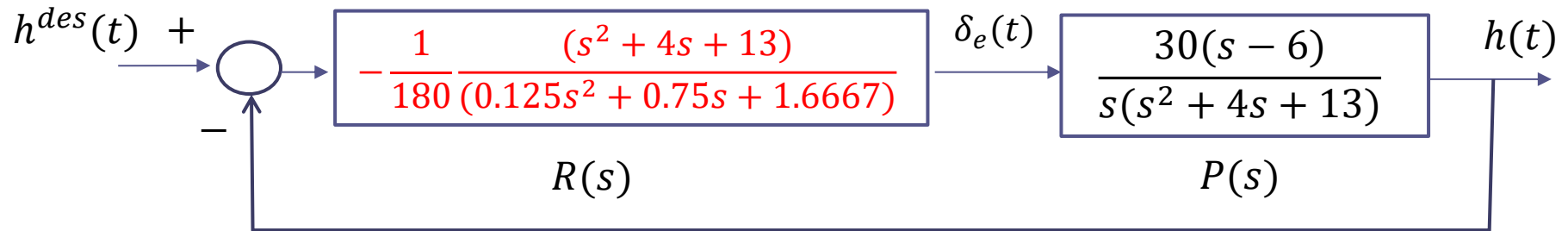
Avendo individuato $W_d(s)$, determiniamo la FdT del controllore:

$$W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + 0.5s)^3} = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.5s + 1} \quad P(s) = \frac{-180 \cdot (1 - \frac{1}{6}s)}{s(s^2 + 4s + 13)}$$

$$D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s) = 0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.5s + 1 - \left(1 - \frac{1}{6}s\right) = 0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.6667s$$

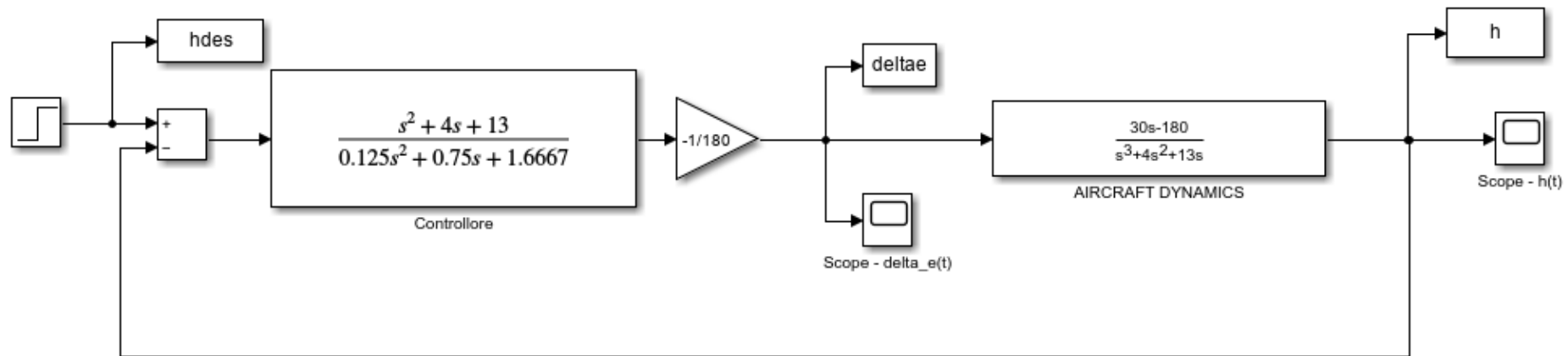
$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_P(s)}{N_P(s)} = \frac{(1 - \cancel{\frac{1}{6}s})}{0.125s^3 + 0.75s^2 + 1.6667s} \cdot \frac{s(s^2 + 4s + 13)}{-180 \cdot (1 - \cancel{\frac{1}{6}s})} \\ &= \frac{1}{\cancel{s}(0.125s^2 + 0.75s + 1.6667)} \cdot \frac{\cancel{s}(s^2 + 4s + 13)}{-180} \\ &= -\frac{1}{180} \frac{(s^2 + 4s + 13)}{(0.125s^2 + 0.75s + 1.6667)} \end{aligned}$$

Sistema di controllo progettato:



Nessuna cancellazione «proibita».

$$W_{h^{des}}^h(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = W_d(s) = \frac{(1 - \frac{1}{6}s)}{(1 + 0.5s)^3}$$





```
Tsim=15; % durata simulazione
h0=8500; % condizione iniziale altitudine

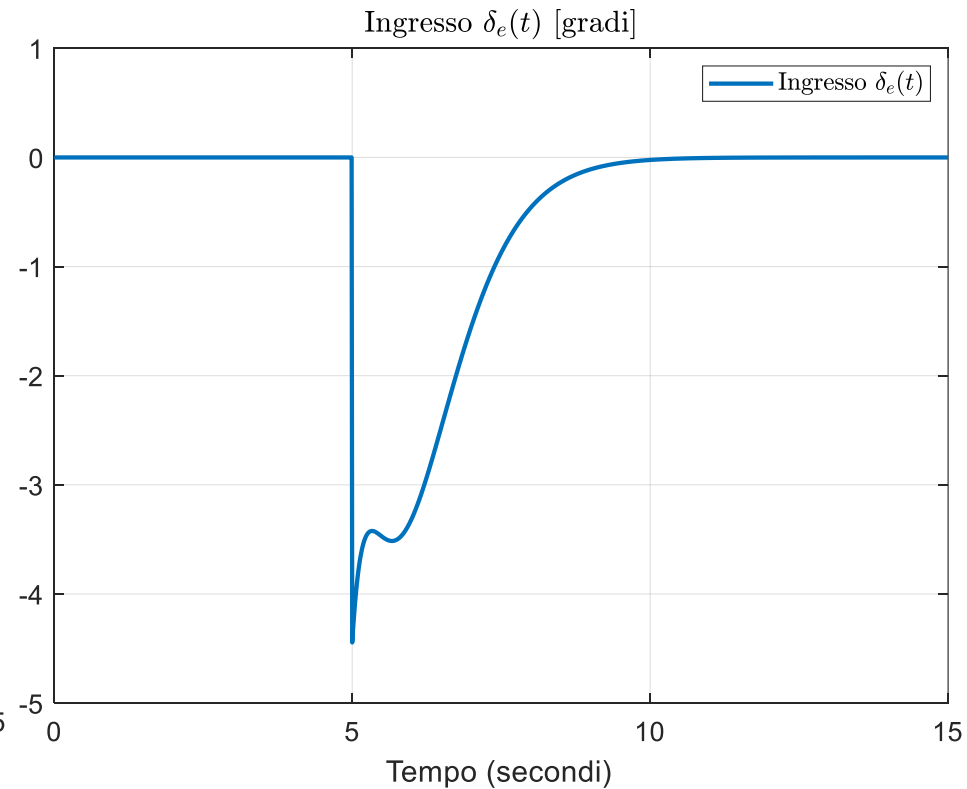
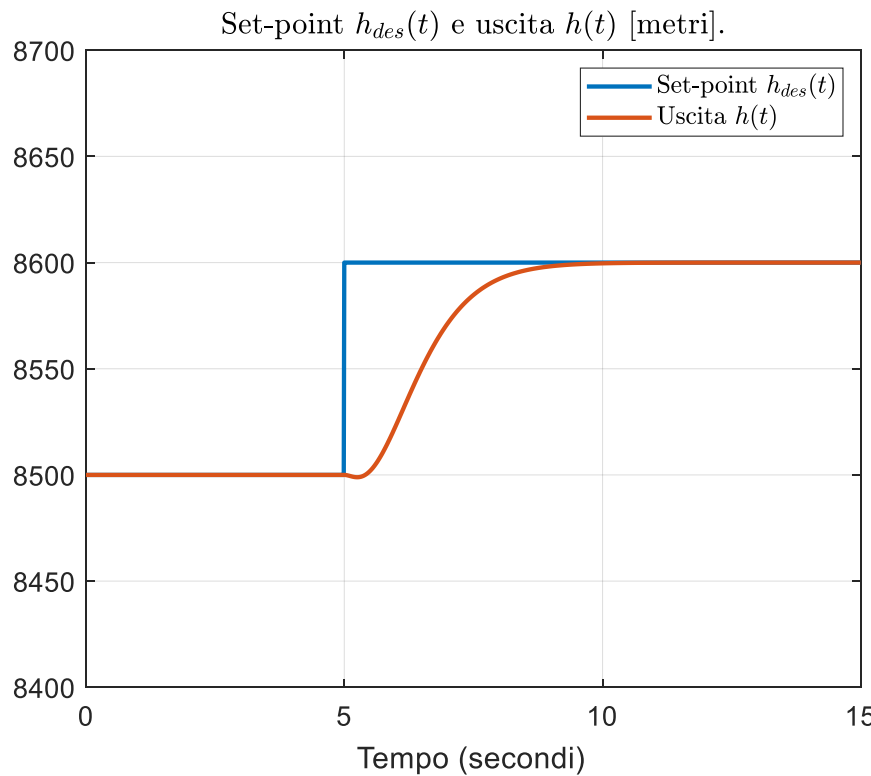
sim('SintesDirettaBoeing747.slx')

figure(1)
plot(hdes,'LineWidth',2), hold on
plot(h,'LineWidth',2), hold off
set(gca,'FontSize',13)
grid
ylim([8400 8700])
legend('Set-point  $h_{des}(t)$ ', 'Uscita  $h(t)$ ','interpreter', 'latex')
xlabel('Tempo (secondi)')
ylabel('')
title('Set-point  $h_{des}(t)$  e uscita  $h(t)$  [metri].','interpreter', 'latex')

figure(2)
plot(deltae,'LineWidth',2), grid
ylim([-5 1])
set(gca,'FontSize',13)
xlabel('Tempo (secondi)')
ylabel('')
title('Ingresso  $\delta_e(t)$  [gradi]','interpreter', 'latex')
legend('Ingresso  $\delta_e(t)$ ','interpreter', 'latex')
```

Il set-point impone un aumento di quota di 100 metri all'istante $t=5$.

Undershooting dell'altitudine nei primi istanti successivi a $t=5$



Riassunto linee guida per la scelta della FdT desiderata

Il **grado relativo** della FdT desiderata $W_d(s)$ deve essere maggiore o uguale al grado relativo del processo $P(s)$. Nella pratica conviene sempre che sia uguale.

La FdT desiderata $W_d(s)$ deve essere **asintoticamente stabile**, e la sua risposta al gradino deve soddisfare le specifiche sul comportamento a regime e sul transitorio.

Quando il **processo ha dei poli a parte reale positiva o nulla** si deve scegliere $W_d(s)$ in modo che il polinomio $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$ ammetta fra le proprie radici («fattorizzi») tutti i poli del processo aventi parte reale positiva o nulla.

Quando il **processo ha un polo nell'origine**, per garantire che il polinomio $D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)$ ammetta fra le proprie radici un polo nell'origine è sufficiente **scegliere la FdT desiderata $W_d(s)$ con guadagno statico unitario**.

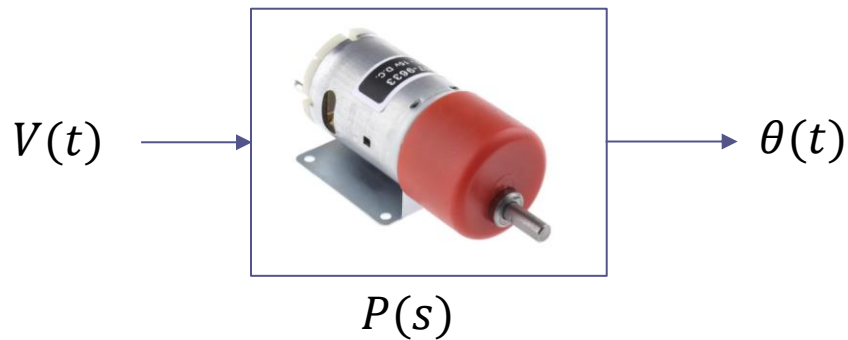
Quando il **processo ha degli zeri a parte reale positiva** la FdT desiderata $W_d(s)$ deve ammettere fra i propri zeri tutti gli zeri a parte reale positiva dal processo.

Una puntualizzazione che sarà chiara sulla base di argomenti che saranno trattati un po' più avanti (v. «comportamento a regime»)

Se il processo $P(s)$ non contiene poli nell'origine, la scelta di una FdT a ciclo chiuso con guadagno statico unitario, volta a garantire la precisione statica, conduce automaticamente ad un controllore avente (almeno) un polo nell'origine, che quindi garantisce anche la reiezione di un disturbo costante.

Difetti della sintesi diretta

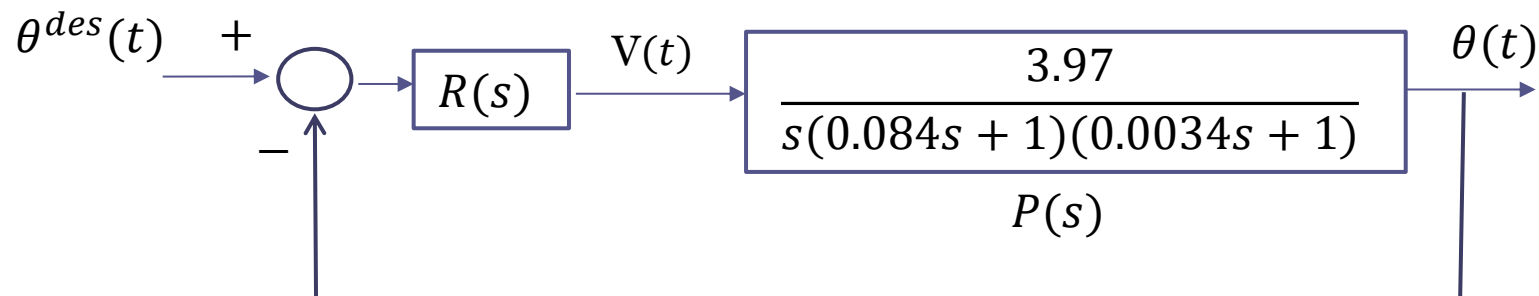
- La sintesi diretta richiede la perfetta conoscenza del modello matematico del processo, e le sue prestazioni decadono in maniera difficilmente predicibile se il modello matematico del processo si scosta da quello nominale impiegato per la sintesi del controllore
- Se il processo è descritto da una FdT di ordine elevato la sintesi diretta produce dei controllori aventi FdT altrettanto complesse (il controllore «eredita» la complessità del processo). Altre metodologie di sintesi permettono di ottenere prestazioni analoghe o confrontabili con dei controllori molto più semplici (ad es. P, PI)



$$R=0.46 \, \Omega, \, L=15 \, \text{mH}, \, J = 0.012 \, \text{kg m}^2$$

$$B=0.0008 \, \text{Ns/rad}, \, K=0.25 \, \text{N/A}$$

$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[(Ls + R)(Js + B) + K^2]} = \frac{3.97}{s(0.084s + 1)(0.0034s + 1)}$$



S1 Precisione statica

S2 Risposta monotona crescente

S3 Tempo di assestamento al 2% < 0.2 secondi

Traccia soluzione

Sviluppare la sintesi trascurando nella FdT del processo il polo elettrico

$$P_{\text{appr}}(s) = \frac{3.97}{s(0.084s + 1)}$$

$$W_d(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^2} \qquad 6T \leq 0.2$$